Signaux et Systèmes

Chapitre 9

Analyse temporelle des signaux discrets

Mars 2021

TABLE DES MATIÈRES

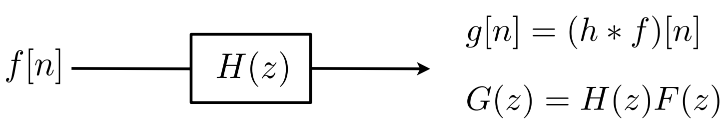
9.1 FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME LID

- Représentation graphique
- Pôles et zéros
- Support de la réponse impulsionnelle
- Causalité et stabilité
- Filtres réels

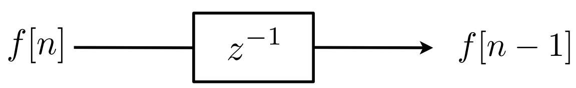
Représentation graphique

Un système LID agit à travers une **convolution** avec sa réponse impulsionnelle $h[n]$, donc par une **multiplication** dans le domain de la transformée en z.

$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] z^{-n}$ est appelée **fonction de transfert** du système.



Exemple: opérateur de décalage or retard ("Shift") $\mathrm{S} : f \mapsto f[\cdot - 1]$



Pôles et zéros

Soit une fonction de transfert $H(z)$. On dit que le nombre complexe z_0 est

- un **zéro** de $H(z)$ is $H(z_0) = 0$
- un **pôle** de $H(z)$ is $\dfrac{1}{H(z_0)} = 0$

Plus généralement:

- z_0 est un **zéro multiple** d'ordre N is $\dfrac{\mathrm{d}^n H}{\mathrm{d}z^n}(z_0) = 0$ pour tout $n = 0, 1, \ldots (N-1)$
- z_0 est un **pôle multiple** d'ordre N is $\dfrac{\mathrm{d}^n (1/H)}{\mathrm{d}z^n}(z_0) = 0$ pour tout $n = 0, 1, \ldots (N-1)$

Exemple

Si $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ où $A(z)$ et $B(z)$ sont des polynômes premiers entre eux, alors

- les zéros de $H(z)$ sont ceux de $A(z)$
- les pôles de $H(z)$ sont les zéros de $B(z)$

Support de la réponse impulsionnelle

Un système LID est à réponse impulsionnelle finie (RIF) ssi il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$H(z) = z^{-n_0} P(z^{-1})$ où $P(x)$ est un ***polynôme*** (de degré fini)

En effet: $$H(z) = \sum_{n=n_0}^{n_1} h[n] z^{-n} = z^{-n_0} \underbrace{\sum_{m=0}^{n_1 - n_0} h[m] x^m}_{P(x)}$$ avec $x = z^{-1}$ $\boxed{m = n - n_0}$

Avantage: implémentation à l'aide d'un nombre ***fini*** de décalages
→système réalisable.

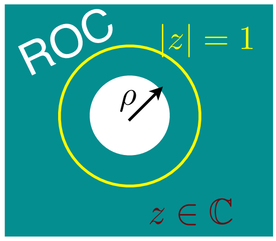
Dans tous les autres cas, le système LID est à ***réponse impulsionnelle infinie*** (RII). En pratique, dès que $H(z)$ a des ***pôles*** ou des régions de ***discontinuité***, alors le système LID est nécessairement RII.

Causalité et stabilité

Système LID ***causal*** $\Leftrightarrow \quad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$: série entière en puissances de z^{-1}

$\Leftrightarrow \quad H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{n}$: série entière en puissances de z (Taylor)

Pour qu'une telle série soit bien défini, il suffit qu'il existe ρ tel que $H(z)$ soit ***analytique*** (c-à-d uniformément convergent) dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}$ et incluant $|z| = \infty$.



$H(z)$ ***analytique dans une couronne*** contenant le cercle unité $\quad \Rightarrow \quad h \in \ell_1(\mathbb{Z})$.

Ainsi, ***causalité*** + $(\rho < 1)$ impliquent ***stabilité*** (BIBO et de composition).

Exemple: $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$ est la transformée en z d'un système LID ***causal*** car $H(z)$ est analytique pour $\mathrm{ROC} = \{|z| > \frac{1}{2}\}$ incluant $|z| = \infty$; elle est également ***stable*** puisque $\rho < 1$.

Filtres réels

Un filtre dont la réponse impulsionnelle est réelle vérifie la propriété de conjugaison:

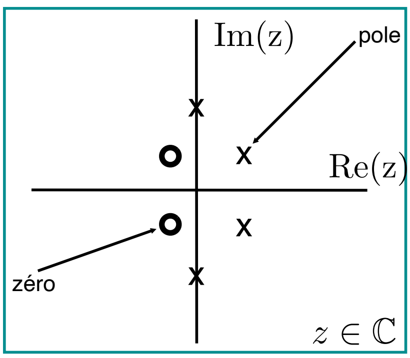
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad H(z)^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^*[n] (z^{-n})^* = H(z^*)$$

$$\boxed{z^n = |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} \Rightarrow (z^n)^* = (z^*)^n}$$

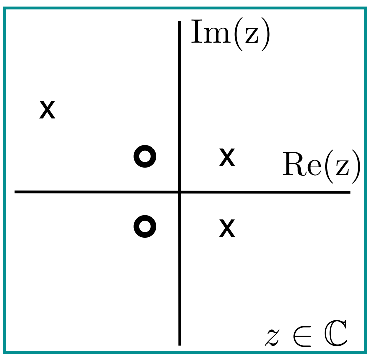
En conséquence

- si z_0 est un **zéro** de $H(z)$ alors z_0^* est aussi un zéro de $H(z)$
- si z_p est un **pôle** de $H(z)$ alors z_p^* est aussi un pôle de $H(z)$

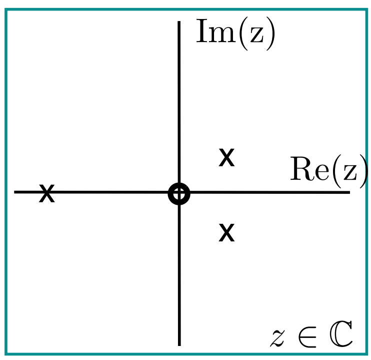
En particulier, les pôles et zéros **non réels** de $H(z)$ sont en nombre pair, positionnés symétriquement par rapport à l'axe réel.



filtre réel



filtre complexe



filtre réel

9.2 ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

- Des dérivées aux différences
- Rappel sur les opérateurs
- Résolution en appliquant l'opérateur inverse
- Méthode de la transformée en z

Des dérivées aux différences

À l'aide d'approximations en puissances de T (pas d'échantillonnage)

$$\underbrace{\big(\delta(t)-\delta(t-T)\big)}_{\text{système discret}} * f(t) = f(t) - f(t-T)$$

$$\cong T \cdot \mathrm{D}f(t) - \frac{T^2}{2!}\mathrm{D}^2 f(t) + \cdots$$

on montre que les ***systèmes LIT différentiels*** peuvent se transposer en ***systèmes LID aux différences*** sous la forme

$$f[n] \longrightarrow \boxed{\text{LID}} \longrightarrow g[n]$$

$$a_N g[n-N] + a_{N-1} g[n-N+1] + \cdots + a_0 g[n] = b_M f[n-M] + \cdots + b_0 f[n]$$

Ou encore, sous forme convolutive

$$(a*g)[n] = (b*f)[n] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k \delta[n-k] \\ b[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \end{cases}$$

Rappel sur les opérateurs

- Equivalence opérateur LID / réponse impulsionnelle $h[\cdot]$

$$\mathrm{S}_h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\mathrm{S}^k \qquad \longleftrightarrow \qquad H(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]z^{-k}$$

$$\mathrm{S}_h : f \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]f[\cdot - k]$$

- Inverse de convolution BIBO stable

Il existe $h_{\mathrm{inv}} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ (unique) t.q. $(h_{\mathrm{inv}} * h)[n] = \delta[n]$

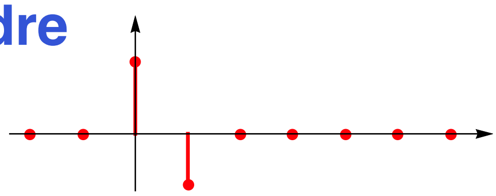
$\Leftrightarrow \quad \mathrm{S}_h^{-1} = \mathrm{S}_{h_{\mathrm{inv}}} : \ell_\infty(\mathbb{Z}) \to \ell_\infty(\mathbb{Z})$

$$\mathrm{S}_h^{-1} : f \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{\mathrm{inv}}[k]f[\cdot - k] \qquad \longleftrightarrow \qquad H_{\mathrm{inv}}(z) = \frac{1}{H(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{\mathrm{inv}}[k]z^{-k}$$

Préparation: inverse du 1er ordre

Opérateur: $\mathrm{S}_{h_0} = (\mathrm{I} - r_0\mathrm{S})$ avec $r_0 \in \mathbb{C}, |r_0| < 1$

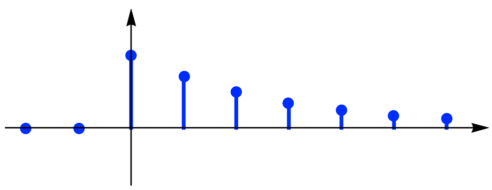
Réponse impulsionnelle: $h_0[\cdot] = \delta[\cdot] - r_0\delta[\cdot - 1]$



$\longleftrightarrow \quad H_0(z) = 1 - r_0 z^{-1}$

- Inverse de convolution

$h_{0,\mathrm{inv}}[n] = (r_0)^n\, u[n]$



Vérification: $\big(h_{0,\mathrm{inv}} * (\delta[\cdot] - r_0\delta[\cdot - 1])\big)[n] = (r_0)^n\, u[n] - r_0(r_0)^{n-1}\, u[n-1] = \delta[n]$

Critère de stabilité: $(r_0)^n\, u[n] \in \ell_1(\mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad |r_0| < 1$

(exponentielle causale décroissante)

$$(\mathrm{I} - r_0\mathrm{S})^{-1} : f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (r_0)^k f[\cdot - k] \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1 - r_0 z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (r_0)^k z^{-k}$$

Résolution des équations aux différences

Problème: étant donnés les échantillons d'entrée $f[n]$, trouver les échantillons de sortie $g[n]$ qui satisfont l'équation aux différences

$$(a * g)[n] = (b * f)[n] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{S}_a\{g\} = \mathrm{S}_b\{f\}$$

Solution: $g[n]$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution (dite "homogène") pour une entrée nulle

$$g = g_{\text{particulière}} + g_{\text{homogène}} \quad = \mathrm{S}_a^{-1}\{b * f\} + g_{\text{homogène}}$$

Trois étapes

1. Déterminer la réponse impulsionnnelle de l'opérateur inverse $\mathrm{S}_a^{-1} : f \mapsto a_{\text{inv}} * f$
2. Déterminer la solution particulière à $\mathrm{S}_a\{g\}[n] = (b * f)[n]$:

   $g_{\text{particulière}}[n] = \mathrm{S}_a^{-1}\{b * f\}[n] = (a_{\text{inv}} * b * f)[n]$
3. Déterminer les solutions homogènes $(a * g_{\text{homogène}})[n] = 0$

   $g_{\text{homogène}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{S}_a) = \{g[\cdot] : \mathrm{S}_a\{g\} = 0\}$: noyau de S_a avec $\mathrm{Ker}(\mathrm{S}_a) \cap \ell_\infty(\mathbb{Z}) = \{0\}$

Hypothèses: S_a est injectif sur $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ et, donc, inversible; S_b est BIBO stable et $f \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$.

Détermination de l'opérateur inverse

Soit $\mathrm{S}_a = \sum_{k=0}^{N} a[k]\mathrm{S}^k : f \mapsto a * f$.

On souhaite trouver $a_{\text{inv}} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ t.q. $(a_{\text{inv}} * a)[n] = \delta[n]$

qui définit l'opérateur inverse: $\qquad \mathrm{S}_a^{-1} = \mathrm{S}_{a_{\text{inv}}} : f \mapsto a_{\text{inv}} * f$

- Factorisation du polynôme caractéristique

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a[k]z^{-k} = z^{-N}a[0]\prod_{k=1}^{N}(z - r_k) = a[0]\prod_{k=1}^{N}(1 - r_k z^{-1})$$

$r_1, r_2, \dots, r_N$: racines de $A(z)$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{S}_a = a[0]\,(\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})(\mathrm{I} - r_2\mathrm{S})\cdots(\mathrm{I} - r_N\mathrm{S})$$

- Forme factorisée de l'inverse de convolution

$$\mathrm{S}_a^{-1} = \frac{1}{a[0]}(\mathrm{I} - r_N\mathrm{S})^{-1}\cdots(\mathrm{I} - r_2\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})^{-1}$$

Condition de stabilité BIBO: $\quad r_k \in \mathbb{C}, |r_k| \neq 1, \quad (k = 1, \cdots, N)$

Calcul de la solution particulière

- Réponse impulsionnelle de l'inverse de convolution

$$a_{\mathrm{inv}}[n] = \mathrm{S}_a^{-1}\{\delta\}[n] = \frac{1}{a[0]}\,(\mathrm{I} - r_N \mathrm{S})^{-1} \cdots (\mathrm{I} - r_2\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})^{-1}\{\delta\}[n]$$

$$= \frac{1}{a[0]}\,(h_N * \cdots * h_2 * h_1)[n]$$

où $\quad h_k[n] = (\mathrm{I} - r_k\mathrm{S})^{-1}\{\delta\}[n] = (r_k)^n\, u[n] \quad$ si $|r_n| < 1$

$$A_{\mathrm{inv}}(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{a[0]} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - r_k z^{-1}}$$

- Calcul final de la réponse particulière: $\quad g[n] = \mathrm{S}_a^{-1}\{b * f\}[n] = (h * f)[n]$

Réponse impulsionnelle globale: $\quad h[n] = (a_{\mathrm{inv}} * b)[n] = \frac{1}{a[0]}(h_N * \cdots * h_2 * h_1 * b)[n]$

$$\updownarrow$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{a[0]} \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - r_k z^{-1}} \right) B(z)$$

Solutions homogènes (pour une entrée nulle)

On souhaite trouver les signaux discrets $g_0[n]$ vérifiant, pour tout n entier

$$a_0 g_0[n] + a_1 g_0[n-1] + \cdots + a_N g_0[n-N] = 0$$

Il s'agit d'une équation de ***récurrence*** d'ordre *N* dont les *N* solutions sont des ***exponentielles*** (éventuellement multipliées par des polynômes).

De façon générale, si l'on construit et factorise le ***polynôme caractéristique***

$$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N} = z^{-N}(a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N)$$
$$= a_0 \left(1 - r_1 z^{-1}\right)\left(1 - r_2 z^{-1}\right) \cdots \left(1 - r_N z^{-1}\right)$$

$r_1, r_2, \ldots, r_N$: racines de $A(z)$

alors la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$g_0[n] = C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n + \cdots + C_N (r_N)^n \quad \text{avec} \quad C_1, \ldots, C_N \in \mathbb{R} \text{ (constantes)}$$

Remarque: si les racines sont multiples, alors la solution générale prend la forme

$$g_0[n] = Q_1(n) \cdot (r_1)^n + Q_2(n) \cdot (r_2)^n + \cdots Q_d(n) \cdot (r_d)^n$$

$d =$ nombre de racines distinctes

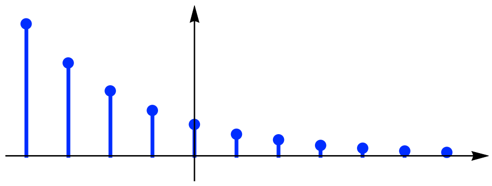
$m_1, m_2, \ldots, m_d =$ multiplicité de la racine $r_1, r_2, \ldots, r_d$

$Q_1(x), Q_2(x) \ldots Q_d(x) =$ polynômes de degré $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_d - 1$

Vérification: Supposons que $r_k \in \mathbb{C}$ soit racine de $A(z) = \sum_{m=0}^{N} a_m z^{-m}$.
$A(r_k) = 0$, d'où $(r_k)^n A(r_k) = 0$ pour tout n et on a

$$0 = (r_k)^n A(r_k) = (r_k)^n \sum_{m=0}^{N} a_m (r_k)^{-m} = \sum_{m=0}^{N} a_m (r_k)^{n-m}$$

$$= (a * g_0)[n] \qquad \text{où} \qquad g_0[n] = (r_k)^n$$

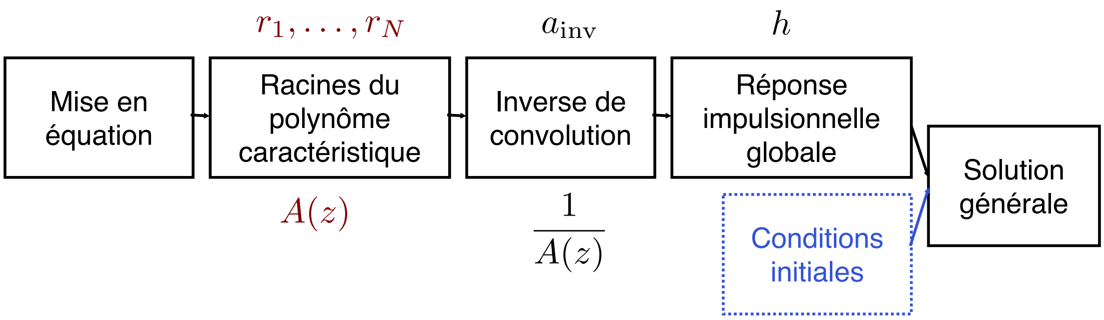


Cette relation est vraie pour toutes les racines de $A(z)$ et, par linéarité, pour toute ***combinaison linéaire*** des racines de $A(z)$

Remarques

- Le polynôme caractéristique $A(z)$ est la transformée en z de la séquence $a[n]$.
- La déterminations des constantes $C_1, \ldots, C_N$ requiert N conditions initiales.
- Hypothèse de stabilité sous-jacente: $|r_k| \neq 1, \forall k \quad \Leftrightarrow \quad g_{\text{homogène}} \notin \ell_\infty(\mathbb{Z})$

Résolution d'une équation aux différences



$$\sum_{k=0}^{N} a[k] g_{\text{out}}[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b[m] f_{\text{in}}[n-m] \quad \Leftrightarrow \quad (a * g_{\text{out}})[n] = (b * f_{\text{in}})[n]$$

Solution générale: $g_{\text{out}}[n] = (h * f_{\text{in}})[n] \quad + \quad g_{\text{homogène}}[n]$

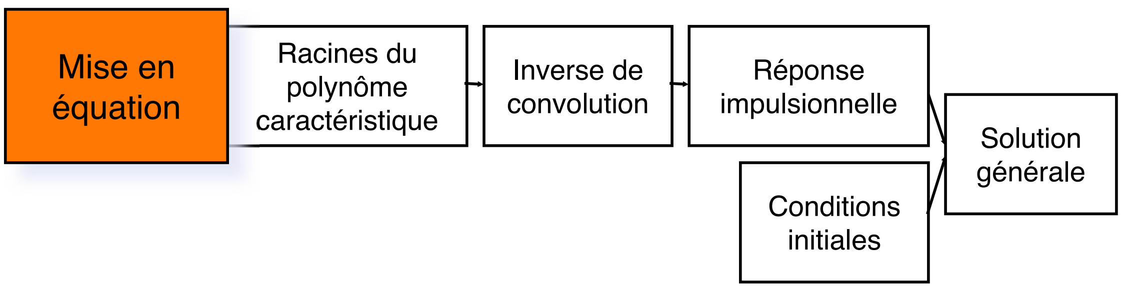
où $h[n] = (a_{\text{inv}} * b)[n]$ et $(a * g_{\text{homogène}})[n] = 0$

Exemple d’application

Un zoologue élève une espèce animale rare pour étudier son comportement social.

À la période n, son élevage est constitué de jeunes en nombre $g_1[n]$, incapables de se reproduire, ainsi que d’adultes en nombre $g_2[n]$. Les jeunes atteignent la puberté au bout d’une période. Par ailleurs, ce zoologue régule son élevage en y apportant (ou en y enlevant) des nouveau-nés en nombre $f[n]$.

Les jeunes ont un taux de mortalité assez élevé: 50%. Les vieux résistent un peu mieux: 30% de taux de mortalité sur une période. Enfin, les adultes se reproduisent au taux de 47.5% sur une période.



Jeunes

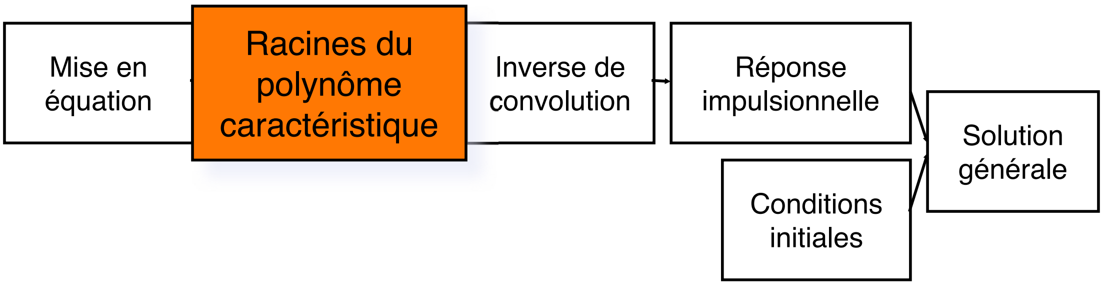
Adultes

$$\begin{cases} g_1[n] = \underbrace{0.475 \cdot g_2[n-1]}_{\text{reproduction des adultes}} + \underbrace{f[n]}_{\text{apport du zoologue}} \\ g_2[n] = \underbrace{(1-0.3)\cdot g_2[n-1] + (1-0.5)\cdot g_1[n-1]}_{\text{“survivants” de la période } n-1} \end{cases}$$

En remplaçant la première équation dans la seconde on obtient

$$-0.2375 \cdot g_2[n-2] - 0.7 \cdot g_2[n-1] + g_2[n] = 0.5 \cdot f[n-1]$$

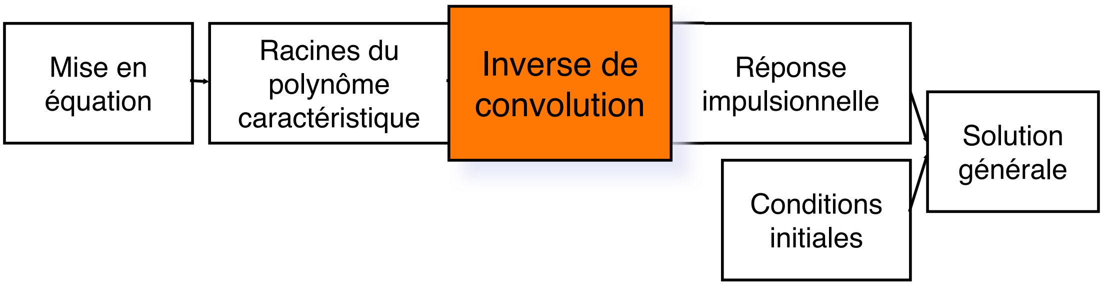
Il s'agit d'une ***équation aux différences*** dont l'entrée est $f[n]$ et la sortie $g_2[n]$.



Equation aux différences: $\underbrace{-0.2375 \cdot g_2[n-2] - 0.7 \cdot g_2[n-1] + g_2[n]} = 0.5 \cdot f[n-1]$

Polynôme caractéristique: $A(z) = -0.2375 \cdot z^{-2} - 0.7 \cdot z^{-1} + 1$

Racines de $A(z)$: $\{r_1, r_2\} = \{0.95, -0.25\}$



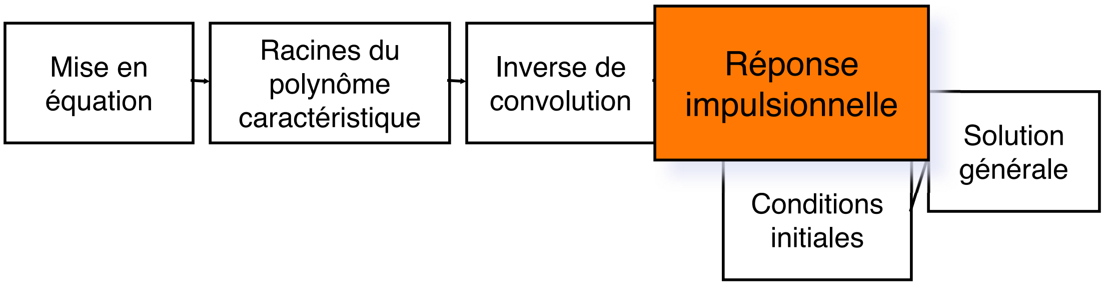
Racines du polynôme caractéristique: $r_1 = 0.95$ et $r_2 = -0.25$

Factorisation: $\mathrm{S}_a = (\mathrm{I} - r_1\mathrm{S})(\mathrm{I} - r_2\mathrm{S})$

Réponses impulsionnelles intermédiaires:

$$h_k[n] = (\mathrm{I} - r_k\mathrm{S})^{-1}\{\delta\}[n] = (r_k)^n\, u[n], \quad k = 1, 2$$

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{inv}}[n] &= (h_1 * h_2)[n] \\ &= \left(\tfrac{r_1}{r_1 - r_2}(r_1)^n - \tfrac{r_2}{r_1 - r_2}(r_2)^n\right)\, u[n] = \left(\tfrac{95}{120}(0.95)^n + \tfrac{25}{120}(-0.25)^n\right)\, u[n] \end{aligned}$$

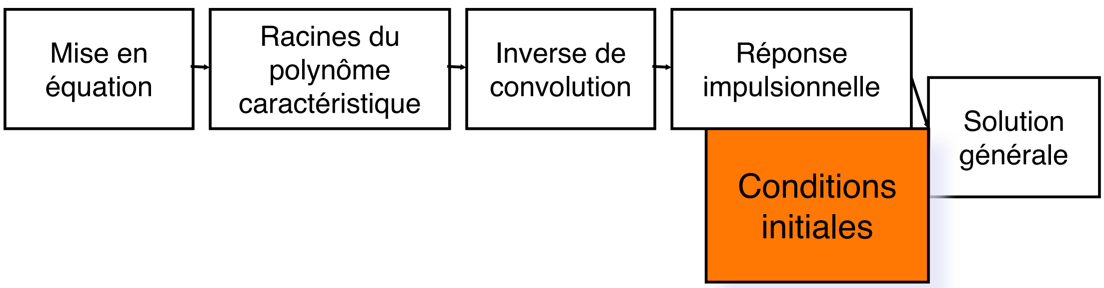


Equation aux différences: $-0.2375 \cdot g_2[n-2] - 0.7 \cdot g_2[n-1] + g_2[n] = 0.5 \cdot f[n-1]$

$$b[n] = 0.5 \cdot \delta[n-1]$$

La formule $h[n] = (a_{\text{inv}} * b)[n]$ donne ici

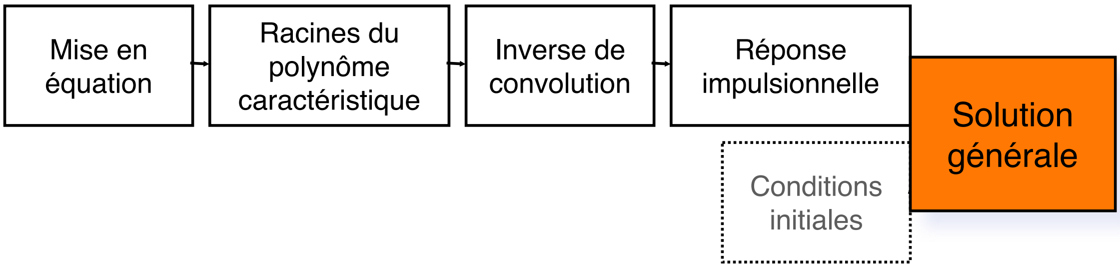
$$\begin{aligned} h[n] &= a_{\text{inv}}[n] * (0.5 \cdot \delta[n-1]) \\ &= \left(\tfrac{95}{240}(0.95)^{n-1} + \tfrac{25}{240}(-0.25)^{n-1}\right)\ u[n-1] \end{aligned}$$



Les conditions initiales servent à fixer les paramètres de la solution de l'équation homogène:

$$\sum_{k=1}^{N} C_k (r_k)^n$$

On suppose ici que l'élevage du zoologue était vide avant le temps n=0, ce qui impose que les coefficients de la solution de l'équation homogène sont tous nuls.



Solution générale = Solution particulière **(+ Solution de l'équation homogène)**

Ici on vient de voir que la solution de l'équation homogène est nulle.

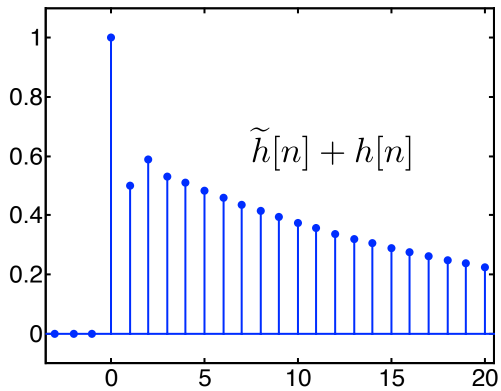
Solution particulière: c'est la réponse impulsionnelle convoluée à l'entrée.

Adultes: $$g_2[n] = (h * f)[n] = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\tfrac{95}{240}(0.95)^{k-1} + \tfrac{25}{240}(-0.25)^{k-1}\right)\cdot f[n-k]\right]$$

Jeunes: $$\begin{aligned} g_1[n] &= 0.475\cdot\delta[n-1] * \overbrace{h[n] * f[n]}^{g_2[n]} + f[n] \\ &= (\widetilde{h} * f)[n] \qquad \text{où } \widetilde{h}[n] = 0.475\cdot h[n-1] + \delta[n] \end{aligned}$$

Par exemple, la ***population totale*** à la période n est donnée par

$$\begin{aligned} g[n] &= g_1[n] + g_2[n] \\ &= \left((\tilde{h} + h) * f\right)[n] \end{aligned}$$



Méthode de la transformée en z

On veut calculer la ***réponse*** $h[n]$ ***à une impulsion*** $\delta[n]$ du système caractérisé par l'équation aux différences $(a * g)[n] = (b * f)[n]$.

Pour cela, on fait l'hypothèse que $h[n]$ admet une transformée en z ***convergente*** dans une couronne du plan complexe (par exemple, si on cherche une solution causale, il s'agit d'une zone de la forme $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_+\}$). On a alors

$$(a * h)[n] = (b * \delta)[n] \xrightarrow{\text{transformée en z}} A(z) \cdot H(z) = B(z) \cdot 1$$

$$\Updownarrow$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

La fonction de transfert d'un système défini par une équation aux différences est donc une ***fraction rationnelle***.

- Décomposition de $H(z)$ en fractions simples

$$H(z) = \frac{B(z)}{a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - r_k z^{-1})} = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{1 - r_k z^{-1}}$$

si les racines r_k sont distinctes et si $\deg(B(z^{-1})) < \deg(A(z^{-1}))$.

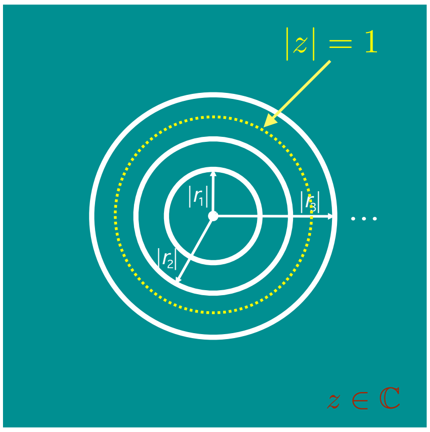
Cette fonction de transfert est analytique partout, sauf sur les cercles $\{z \in \mathbb{C} : |z| = |r_k|\}$. Donc, pour chaque couronne $\{z \in \mathbb{C} : |r_k| < |z| < |r_{k+1}|\}$, il existe effectivement une réponse impulsionnelle dont la transformée en z converge vers $H(z)$.

Lorsque ROC de $H(z)$ contient le cercle de rayon ρ, on a (cf. table)

causal

$$\frac{1}{1 - r_k z^{-1}} \xrightarrow{\text{transformée en z inverse}} \begin{cases} (r_k)^n \, u[n] & \text{si } \rho > |r_k| \\ -(r_k)^n \, u[-n-1] & \text{si } \rho < |r_k| \end{cases}$$

anti-causal



On en déduit l'expression de la réponse impulsionnelle

$$h[n] = \sum_{|r_k| < \rho} C_k \, u[n] (r_k)^n - \sum_{|r_{k'}| > \rho} C_{k'} \, u[-n-1] (r_{k'})^n$$

NB: La **stabilité** (c-à-d, $h \in \ell_1$) n'est assurée que si on peut prendre $\rho = 1$. Donc, pour que la réponse soit ***causale-stable***, il faut que $|r_k| < 1$ (pôles à l'intérieur du cercle unité).

9.3 RÉALISATION

- Systèmes LID réalisables
- Stabilité
- Causalité + stabilité
- Paramètres d'implémentation
- Implémentations FIR et IIR

Systèmes LID réalisables

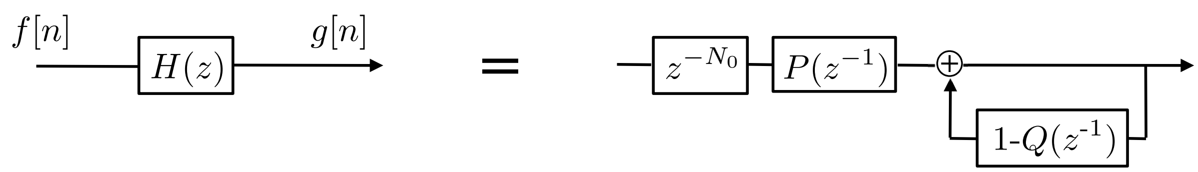
Un système LID est **réalisable** s'il peut s'implémenter à l'aide d'un nombre fini de registres mémoire. On démontre que les systèmes LID réalisables se caractérisent par une fonction de transfert rationnelle

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{-N_0} \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des ***polynômes*** (donc de degré fini) premiers entre eux.

Donc, un système LID est ***réalisable*** ssi son évolution est régie par une ***équation aux différences***.

Implémentation du dénominateur sous forme ***récursive***:



Remarque: dès que $Q(z^{-1})$ n'est pas de la forme z^{-d} (délai pur), la réponse impulsionnelle du système est nécessairement à ***support infini*** (RII).

Extrait du formulaire

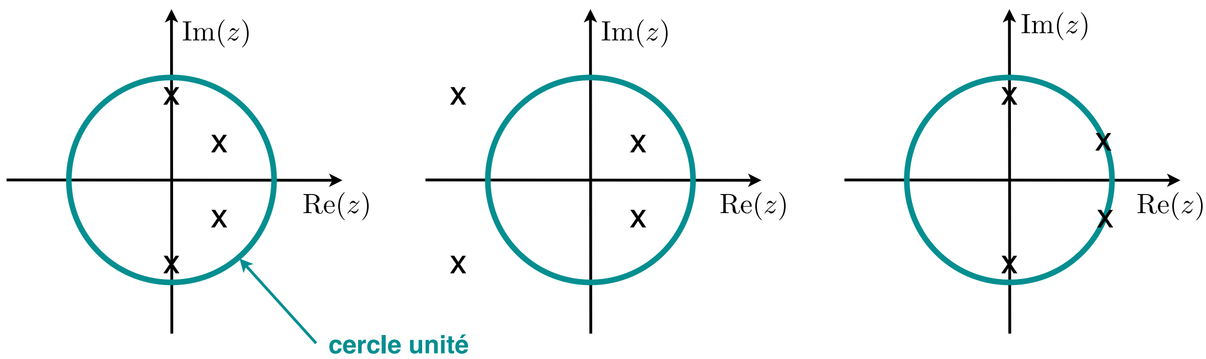
- Fonction de transfert rationnelle

$$H(z) = z^{-n_0}\frac{B(z)}{A(z)} = z^{-n_0}\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} = z^{-n_0} b_0 \frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - z_{0,m} z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - z_{\mathrm{p},n} z^{-1})}$$

  - **Forme canonique** avec $n_0 \in \mathbb{Z}$, $b_0, b_M, a_N \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et telle que les ***polynômes*** $\left(z^M B(z)\right) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M$ et $\left(z^N A(z)\right) = z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N$ de degrés M et N soient premiers entre eux.
  - **Zéros** $(z_{0,m})_{m=1}^{M}$: racines de $\left(z^M B(z)\right) \quad \Leftrightarrow \quad B(z_{0,m}) = 0$ (si $z_{0,m} \neq 0$)
  - **Pôles** $(z_{\mathrm{p},n})_{n=1}^{N}$: racines de $\left(z^N A(z)\right) \quad \Leftrightarrow \quad A(z_{\mathrm{p},n}) = 0$ (si $z_{\mathrm{p},n} \neq 0$)
  - Système **causal-stable** $\quad \Leftrightarrow \quad |z_{\mathrm{p},n}| < 1, \quad n = 1, \ldots, N$

Stabilité

Pour qu'une fraction rationnelle $H(z)$ soit la fonction de transfert d'un ***système LID réalisable stable***, il faut et il suffit que les ***pôles*** de $H(z)$ ***ne soient pas sur le cercle unité***.



stable | stable | instable

De toutes les réponses impulsionnelles qui correspondent à la ***même*** fonction de transfert, seule celle dont la ***région de convergence inclut le cercle unité*** sera stable.
Cette solution n'est en général **pas causale**.

Note: certains systèmes LID ***temporels*** réalisables peuvent être **marginalement stables** (sommateur glissant), voir instables …

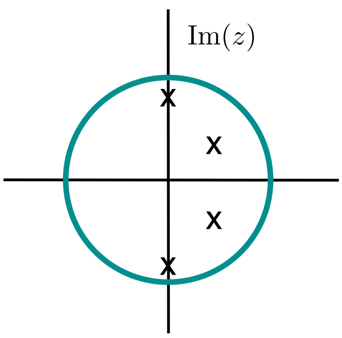
Extrait du formulaire: Table de transformées en z

$f[n]$	$F(z)$	ROC = zone de convergence
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ si $n_0>0$, ou $\mathbb{C}$ si $n_0\leq 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert>1\}$
$s_+^N[n]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^{N+1}}$	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert>1\}$
$a^n\,u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert>\lvert a\rvert\}$
$-a^nu[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<\lvert a\rvert\}$
$a^n s_+^N[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^{N+1}}$	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert>\lvert a\rvert\}$
$(-1)^{N+1}a^n s_+^N[-n-N-1]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^{N+1}}$	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<\lvert a\rvert\}$

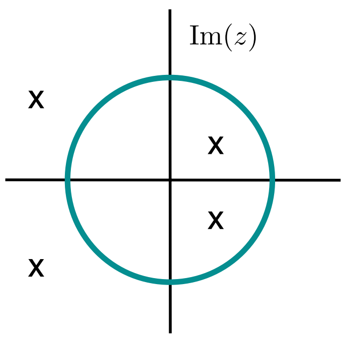
Causalité + stabilité

Les systèmes ***temporels*** réalisables sont nécessairement ***causaux***—à la différence des systèmes spatiaux. Cela implique que $H(z)$ soit analytique pour $|z|>\rho_+$. Si, en outre, on impose la stabilité, il devient alors nécessaire que le cercle unité soit contenu dans le domaine de convergence, d'où $\rho_+<1$.

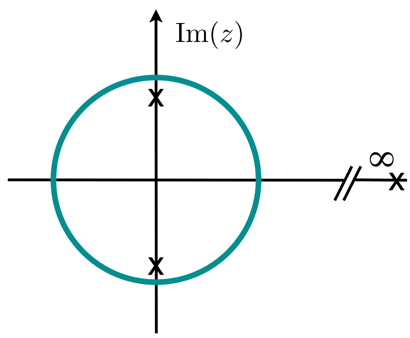
La fraction rationnelle $H(z)$ est la fonction de transfert d'un système ***LID réalisable, stable et causal*** si et seulement si elle a tous ses ***pôles à l'intérieur du cercle unité***.



causal et stable



causal non-stable/
non-causal et stable



non-causal et stable

Paramètres d’implémentation

Complexité ou ***coût*** de calcul: le nombre total d'***additions***, de ***multiplications***, de divisions etc… nécessaires pour obtenir un échantillon.

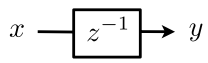
Il était d'usage, par le passé, de considérer que les multiplications coûtaient beaucoup plus cher que les additions, mais sur un ordinateur moderne, il vaut mieux les considérer comme équivalentes.

Mémoire de stockage: selon l'application (microtechnique!), il peut être nécessaire de réduire au maximum les besoins de stockage. Par ailleurs, sur un ordinateur moderne, il est fréquent que les temps de calcul soient dominés par les ***temps d'accès*** à la mémoire.

Retard: le délai incompressible entre l'entrée et la sortie d'un système (indépendant du temps de calcul lui-même) est un paramètre important dans les applications de nature ***interactive*** (télécoms).

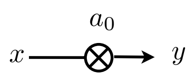
Opérations de base: symboles graphiques

Retard



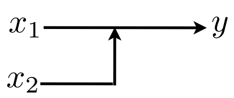
$$y[n] = x[n-1]$$

Multiplication



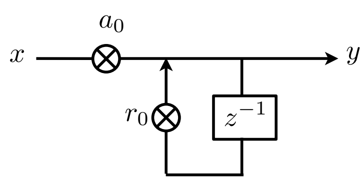
$$y[n] = a_0 \cdot x[n]$$

Addition



$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

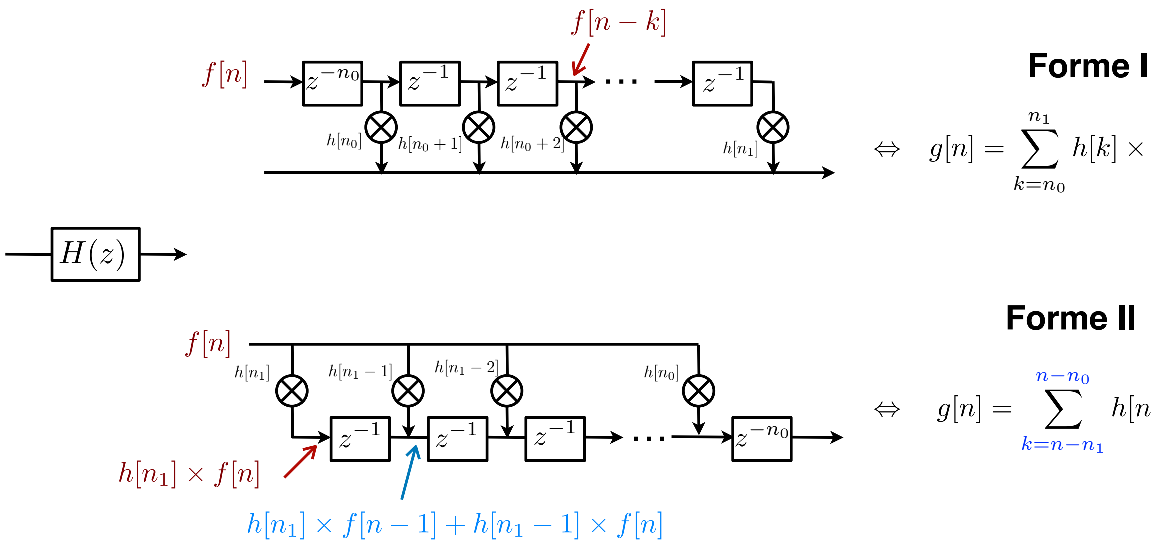
Exemple



$$y[n] = a_0 \cdot x[n] + r_0 \cdot y[n-1]$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{a_0}{1 - r_0 z^{-1}}$$

Implémentation directe (filtre FIR)



$$\Leftrightarrow \quad g[n] = \sum_{k=n_0}^{n_1} h[k] \times f[n-k]$$

$$\Leftrightarrow \quad g[n] = \sum_{k=n-n_1}^{n-n_0} h[n-k] \times f[k]$$

Coût de calcul: $(n_1 - n_0 + 1)$ additions et $(n_1 - n_0 + 1)$ multiplications

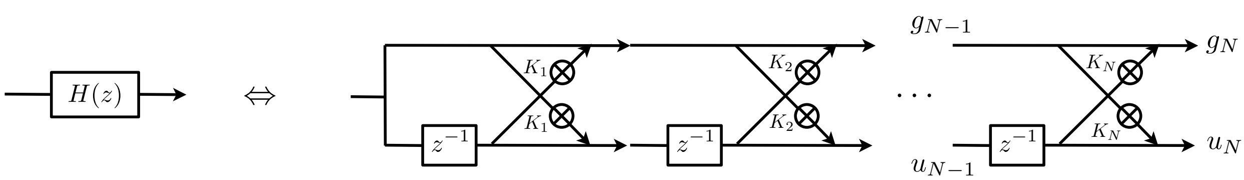
Stockage: $2n_1 - n_0 + 1$ registres mémoire

#retards: $n_1 - n_0$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f[n-1], f[n-n_0-1], \dots f[n-n_1] \\ h[n_0], h[n_0+1], \dots h[n_1] \end{cases}$$

Implémentation en treillis

$$\begin{bmatrix} G_{i+1}(z) \\ U_{i+1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_i z^{-1} \\ K_i & z^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_i(z) \\ U_i(z) \end{bmatrix}$$



Les coefficients $K_1, K_2, \dots, K_N$ sont appelés coefficients de réflexion. Ce type de structure est très utilisé en traitement et codage de parole (filtres adaptatifs etc.). g_N est alors appelé ***erreur de prédiction*** progressive (“forward”) et u_N erreur de prédiction rétrograde (“backward”).

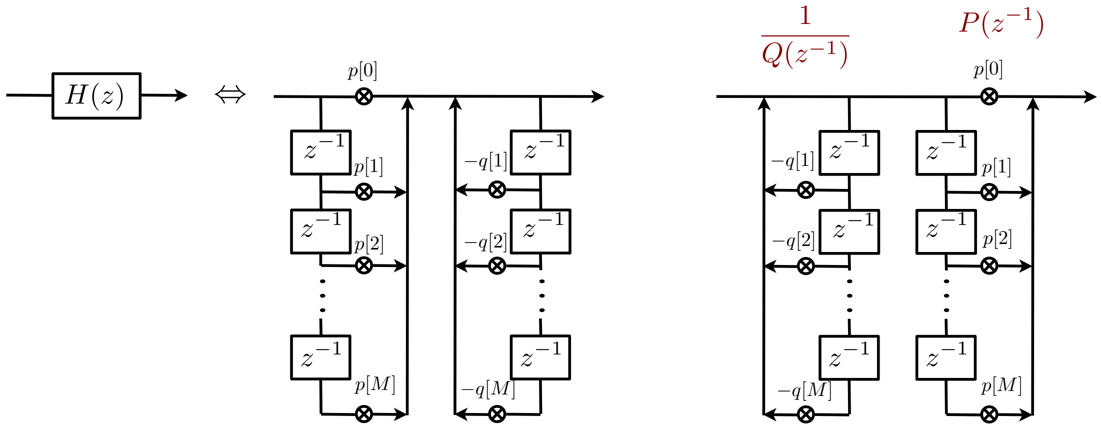
Remarque: le filtre $H(z)$ a ses racines dans le disque unité si et seulement si $|K_i| < 1$ (test de Schür-Cohn). Ce qui assure en particulier la stabilité du filtre inverse $1/H(z)$ (codage linéaire de la parole "LPC", synthèse de la parole).

Implémentation directe (filtre IIR)

- Implémentation récursive non canonique

On se donne $H(z) = \dfrac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$ avec $q[0] = 1$, $\deg(P) = M$ et $\deg(Q) = N$.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} p[m]\, x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} q[k]\, y[n-k]$$

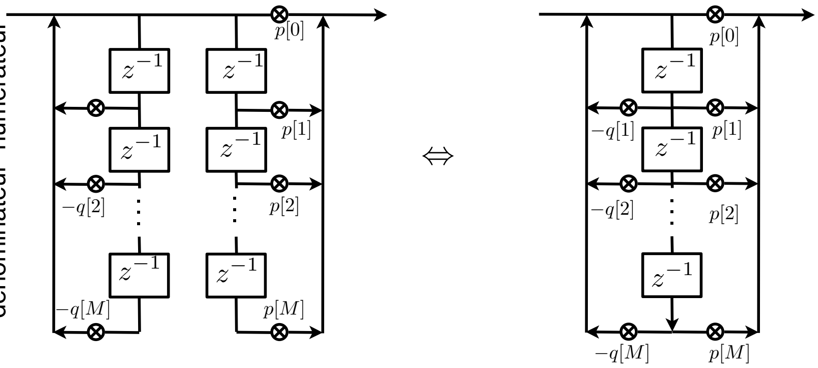


forme “numérateur–dénominateur” forme “dénominateur–numérateur”

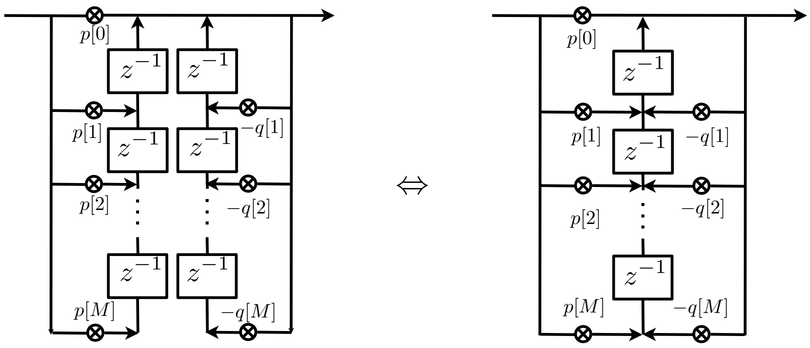
Implémentation canonique

Pour simplifier, on suppose $N = M$.

forme I “dénominateur–numérateur”



forme II “numérateur–dénominateur”



Avantages:
#retards=M au lieu de $2M$ (nombre minimal de délais);
stockage réduit de M.

Implémentation parallèle

Décomposition de $H(z) = \dfrac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$ en ***fractions simples***:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - r_k z^{-1}}$$

Hypothèse simplificatrice: $\deg(P) < \deg(Q)$ et $H(z)$ n'a pas de pôle multiple.